Title	Linear semi-ordered spaceニ就イテ
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 207 p.467-p.473
Issue Date	1940-12-23
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74827
rights	
Note	

897. Linear semi-ordered space ニ就イテ

深宮 政範（阪大）

戰爭デ未着ノ Studia Math., 9 (1940) ニ Krein-Milman ガ次ノ定理ヲ證明シテヰル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ B－空間 E ノ共軛空間 $\bar{E}$ 内ノ有界ナ[1]，regularly convex ナ部分集合ハ extreme points ヲ有ツ。

茲ニ集合 $K \subset \bar{E}$ ガ regularly convex デアルト云フノハ任意ノ $g \bar{\in} K$ ニ對シテ $\sup_{f \in K} f(x_0) < g(x_0)$ ナル $x_0 \in E$ ガ存在スルコトヲ云フ。K ガ convex set デアルトキ $f \in K$ ガドンナ $g, h \in K$ ニ對シテモ $f \neq \frac{1}{2}(g+h)$ デアレバ f ハ K ノ extreme point デアルト云フ。

最近吉田耕作氏ガ regularly convex set ト convex set トノ間ノ duality ヲ注意サレテ，elegant ナ interpretation ヲ與ヘラレタ。夫レハ談話 $\boxed{}$ ニヨッテ紹介サレテヰルノデ是非參照サレタイ。

茲デハ Krein-Milman ノ定理ノ證明ヲ述ベタイ。

---

1) 有界ト云フ條件ハ實際必要デアッタ。例 $x_0 \in E$ ヲ fix シテ $f(x_0)=0$ ナル $f \in \bar{E}$ 全体ノ集合

夫ニハ transfinite induction ヲ用フルノデアルが，次ノ定理が必要デアル。

$\boxed{\text{定理2}}$[2)] E ノ有界，convex ナ集合 K が regularly convex デアルタメノ必要十分ナ條件ハ K が E ノ functional トシテノ weak topology ニ関シテ bicompact ナ事デアル。

コノ定理ニツイテハ後デ別ニ直接ノ証明ヲスル。Šmulian ノ証明デ夫デ充分ナノデアルが，後ニ述ベル方がズット簡潔デアルト思フ。

定理1ノ証明：

凡テノ $f \in K$ ハ $\|f\| \leqq 1$ ト假定スル。Zermelo's axiom ヲ用ヒテ $x \in E$, $\|x\| \leqq 1$ 全体ヲ well-order シテ

(1) $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha < \eta)$

トスル（ソノ仕方ハ unique デハ無イ）

定理2ニヨッテ K ノ上デノ continuous $f(x)$ $(x \in E)$ ハ max. min ヲ attain スル．今

$$\sup_{f \in K} f(x_0) = f_1(x_0), \quad f_1 \in K$$

ノ集合ヲ K_1 トスル。K_1 が唯一点 f_1 ダケカラ成レバ明カニ f_1^0 ハ extreme point デアル。（ドンナ $g, h \in K$ ニ対シテモ $f_1^{\varphi}(x_0) > g(x_0), h(x_0)$；従ッテ $f_1(x_0) \neq$

---

2) V. Šmulian, Über lineare topologische Räume, Rec. Math. Moscou, 7(1940)

$\frac{1}{2}(g(x_0)+h(x_0))$

モシK_1ガ一点以上含ンデ居レバ$f(x_\alpha)\neq const (f\in K_1)$ナル最初ノ$\alpha$ヲトリ，$\alpha=\alpha_1$トシテ

$$\sup_{f_1\in K_1} f_1(x_{\alpha_1})=f_2(\alpha_1),\quad f_2\in K_1$$

ナル集合K_2ヲ作ル，K_2ハconvex, closed set, $\subset K_1$. K_2ガ一点デアレバ夫ハKノ extreme point デアルコトハ明カデアル。K_2ガ一点デナケレバ$f(x_\alpha)\neq const (f\in K_2)$ナル最初ノ$\alpha$ヲ$\alpha_2$トスレバ

$$\sup_{f_2\in K_2} f_2(x_{\alpha_2})=f_3(\alpha_2),\quad f_3\in K_2$$

ナル convex, closed set K_3ヲ作ル。

一般ニ convex, closed sets ノ seq. $K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\cdots\supset K_\xi\supset\cdots\cdots$ ガ$\xi<\xi_1$（$<\eta$）ナル凡テノξニ對シテ定義サレタトスル。

ξ_1ガ limit ordinal デナイトキ：

$f(x_\alpha)\neq const (f\in K_{\xi_1-1})$ナル様ナ最小ノ$\alpha$ヲ$\alpha_{\xi_1-1}$トシ，$\sup_{f\in K_{\xi_1-1}} f(x_{\alpha_{\xi_1-1}})=f_{\xi_1}(x_{\alpha_{\xi_1-1}})$, $f_{\xi_1}\in K_{\xi_1-1}$ナルf_{ξ_1}全体ノ作ル convex, closed set K_{ξ_1}ヲ作ル。

ξ_1ガ limit ordinal ノ時：$K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_\xi\supset\cdots\cdots(\xi<\xi_1)$ハ closed set ノ monotonic sequence デアルカラ$\prod_{\xi<\xi_1} K_\xi=K_{\xi'}$ハ leer デハ無

イ. 此ノK_{ξ}'ヲ前ノK_{ξ_1-1}ノ代リニ用ヒテ同様ニK_{ξ_1}ヲ定義スル。

以上ニヨッテ$\xi<\eta$ナル凡ユルξニ対シテ convex, closed sets K_ξガ定義サレ, $K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\cdots\supset K_\xi\supset\cdots\cdots$. 依ッテ$\prod_{\xi<\eta}K_\xi$ヲ作レバ之ハ leer デハ無イ (bicompact!)

且ツ$\prod_{\xi<\eta}K_\xi$ハ唯一点カラ成立ツ。何トナレバ$\prod_{\xi<\eta}K_\xi$ガ2点f, gヲ含メバ$f(x)\neq g(x)$ナル$x=x_\alpha$ガ存在スル。今$\alpha<\alpha_\xi$トスレバ$f, g\in K_\xi$ニヨッテ$f(x_\alpha)=g(x_\alpha)$トナル筈デアルカラ

$f_0=\prod_{\xi<\eta}K_\xi$ハ extreme point デアル. 任意ノ$g, h\in K$ヲトレバ$g, h\bar{\in}K_\xi$, ナルヤウナ最小ノ$\xi$ガ存在スル。従ッテ$\alpha>\xi$ナラバ$g(x_\alpha), h(x_\alpha)<f(x_\alpha)$, 従ッテ$f\neq\frac{1}{2}(g+h)$.

2. 定理. $\bar{E}$ノ有界, convex ナ集合Kガ regularly convex デアルタメノ必要十分ナ條件ハ

KガEノ functional トシテノ weak topology ニ関シテ bicompact ナ事デアル。

証明. 便宜ノタメ$\|f\|\leqq 1$ $(f\in K)$ト假定スル. $\bar{E}$ノ functional トシテノ weak topology ヲ考ヘルコトハ次ノ事ト同等デアル。

Sヲ$\|x\|\leqq 1$ナル$x\in E$ノ集合トシ, Sノ上デ定義サレタ凡ユル有界ナ実数値函数 $(|g(x)|\leqq 1)$ 全体ノ

集合ヲ B(S) デ表ハス　B(S)ニ對シテ topology ヲ
近傍系

一般 夫ニハ所謂 regularly convex ナ集合ハ weakly closed デアルコトヲ考ヘレバ，K ハ B(S) デノ closed — 從ッテ bicompact ナ sub set デアルコトガ云ヘル。（例ヘバ $f \in E$ ガ K ノ condensation point ノ一ツトシ，且ツ $f \bar{\in} K$ トスレバ，假定カラ $\alpha = \sup_{f' \in K} f'(x_0) < f(x_0)$ ナル $x_0 \in E$ ガアル。($\|x_0\| \leqq 1$)。從ッテ $f(x_0) - f'(x_0) \geqq f(x_0) - \alpha > 0$ $(f' \in K)$，故ニ $|f(x_0) - g(x_0)| < \frac{1}{2}(f(x_0) - \alpha)$ ナル f ノ近傍ハ K ト disjoint トナル）。

逆ニ K ガ B(S) デ bicompact ナラバ regularly convex

$$\{U\} \quad U = U(f_0; x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n; \varepsilon)$$

$$= \underset{f \in B_S}{E}\left[|f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n\right]$$

ニヨッテ定義スレバ B(S) ハ区間 $-1 \leqq t_x \leqq +1$, $x \in \Omega$ ノ積空間ト homeomorphic デ，從ッテ bicompact top. space トナル．特ニ B(S) ノ中デ $\{f(x)\}$, $f \in E$ ($\|f\| \leqq 1$) ナル如キ点全体ハ B(S) ノ topology ニツイテ closed, convex — 即チ weakly closed, convex — ナ集合トナル。（之ヲ F デ表ハス）
以下

K ヲ B(S) ニテ考ヘル。

Kガ regularly convex デアレバ K ハ bicompact デアル。F（ヌハ B）ハ bicompact デアルカラ completely regular デアル．従ッテ $g \in K$ ヲ與ヘルト F ノ上デノ（ヌハ B）continuous function $\varphi(f)$ ガ存在シテ $\varphi(g)=0$，$\varphi(K)=1$，$0 \leqq \varphi(f) \leqq 1$ トナル．故ニ g ノ近傍 U ヲ適當ニトレバ U・K ハ空集合トナル。

今 U ヲ

$$U: \ |g(X_i)-f(X_i)|<\varepsilon, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n$$

トスル。$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ニヨッテ K 及ビ g ヲ n 次元ノ Euclid 空間 R^n ニ次ノヤウニ寫像スル．任意ノ $f \in K$ ニ対應サセルニ $\varphi(f)=(f(X_1), f(X_2), \cdots\cdots, f(X_n))$ ヲ以テスレバ K ハ φ ニヨッテ R^n 内ノ有界，convex, closed ナ集合ニ移サレル．然ルニ U ノ定義カラ $\varphi(g)$ ハ $\varphi(K)$ ニハ屬サナイ．従ッテ $\varphi(g)$ ヲ通ル hyperplane $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 1$ ヲ適當ニトレバ

$$\sup_{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\varphi(K)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i < 1, \quad \text{且} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = 1$$

但シ $(\eta_1, \cdots\cdots, \eta_n) = (g(X_1), g(X_2), \cdots\cdots, g(X_n))$

ナル様ニ出来ル。依ッテ $X_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ ヲトレバ

$$\sup_{f \in K} f(X_0) < g(X_0)$$

依ッテ K ハ regularly convex デアル。